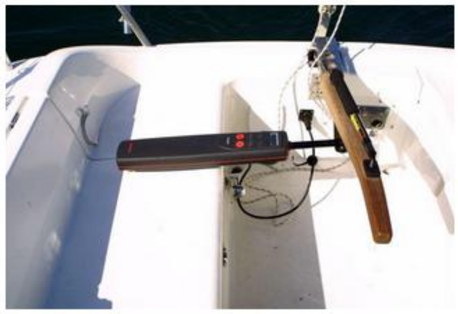
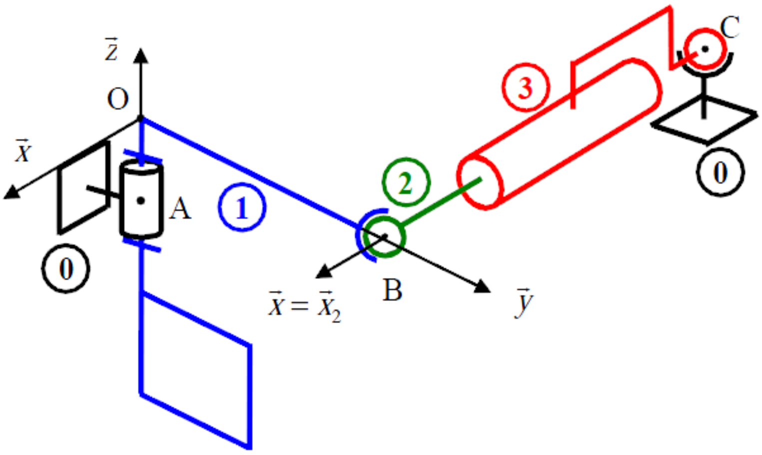
TD – Cinématique du solide

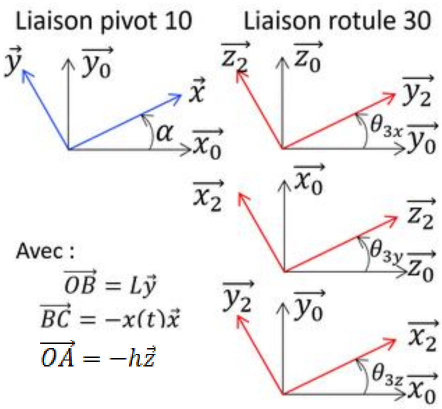
Exercice 1 : Pilote automatique de bateau



Afin de permettre aux skippers d'effectuer des opérations de bord ou de maintenance sur un bateau, les pilotes automatiques permettent d'asservir le cap d'un bateau en mesurant le cap réel (au moyen d'une boussole), la trajectoire optimale (avec un GPS et des données maritimes), et agissent directement sur la direction du bateau en faisant pivoter la gouverne.

On s'intéresse ici à un pilote de cockpit, capable de gérer des barres franches de petits bateaux (moins de 12 m). La cinématique, simplifiée, du pilote et de la gouverne est donnée ci-dessous :





Avec :
$\overrightarrow{OB} = L\vec{y}$
$\overrightarrow{BC} = -x(t)\vec{x}$
$\overrightarrow{OA} = -h\vec{z}$

Q1 – Donner le graphe de liaisons de ce modèle.

Q2 – Exprimer les vitesses $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$.

Q3 – À l'aide d'une fermeture cinématique, en déduire la vitesse de gouverne $\dot{\alpha}(t)$ en fonction de la vitesse de sortie de la tige $\dot{x}(t)$, dans la position donnée du dessin ($\vec{x} = \vec{x_2}$), et montrer que $\dot{\theta}_{3y} = \dot{\theta}_{3z} = 0$.

Méthodologie

Q3 – Dans une chaîne cinématique **fermée**, comme ici, on appelle « fermeture cinématique » une **équation** qui correspond à écrire une même vitesse de deux façons différentes.

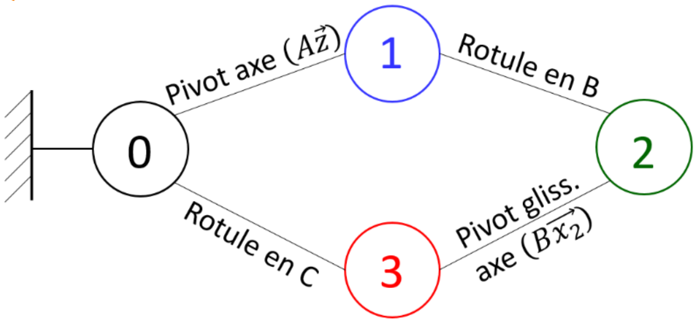
Généralement la démarche est la suivante :

- On a un point d'articulation (ou de roulement sans glissement) entre deux solides, par exemple ici 1 et 2, et on écrit $\overrightarrow{V_{B,2/1}} = \vec{0}$
- On applique une composition en ce point d'articulation : $\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \cancel{\overrightarrow{V_{B,1/0}}}$
- On exprime, séparément, $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ en se servant de la méthode vue en Q2. **ATTENTION** : l'idée générale de cette méthode est de déterminer la vitesse de B en passant par chaque chaîne de la boucle (voir graphe des liaisons en Q1), comme sur une fermeture géométrique. Attention, donc à ne surtout pas calculer $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$ en repassant par le solide 1 (ou $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ en passant par le solide 1)… sinon on va se retrouver avec une équation de type $\vec{0} = \vec{0}$, et c'est perdu.
- On obtient alors une égalité vectorielle = 3 égalités scalaires, que l'on peut projeter si nécessaire.

TD – Cinématique du solide

CORRIGE

Q1 –



Q2 – a. Déterminons $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$: on a une liaison 1/0, de torseur $\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix}\dot\alpha\vec z\\ \vec 0\end{Bmatrix}_A$ (liaison pivot).

Donc $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \vec 0 + \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}\right)\wedge \dot\alpha\vec z = (-L\vec y - h\vec z)\wedge \dot\alpha\vec z = -L\dot\alpha\vec x$

b. Déterminons $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$: on doit passer par l'autre bout de la chaîne, et il n'y a pas de liaison directe entre 2 et 0.

On écrit donc une composition en B : $\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/3}} + \overrightarrow{V_{B,3/0}}$, avec $\{V_{2/3}\} = \begin{Bmatrix}\omega_{2/3}\overrightarrow{x_2}\\ \dot x\overrightarrow{x_2}\end{Bmatrix}_B$ (Pivot glissant)

Et $\{V_{3/0}\} = \begin{Bmatrix}\dot\theta_{3x}\vec x + \dot\theta_{3y}\vec y + \dot\theta_{3z}\vec z\\ \vec 0\end{Bmatrix}_C$

On a donc $\overrightarrow{V_{B,2/3}} = \dot x\overrightarrow{x_2} = \dot x\vec x$

Et $\overrightarrow{V_{B,3/0}} = \vec 0 + \overrightarrow{BC}\wedge\left(\dot\theta_{3x}\vec x + \dot\theta_{3y}\vec y + \dot\theta_{3z}\vec z\right) = -x(t)\vec x\wedge\left(\dot\theta_{3x}\vec x + \dot\theta_{3y}\vec y + \dot\theta_{3z}\vec z\right) = -x(t)\dot\theta_{3y}\vec z + x(t)\dot\theta_{3z}\vec y$

D'où finalement $\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/3}} + \overrightarrow{V_{B,3/0}} = \dot x\vec x - x(t)\dot\theta_{3y}\vec z + x(t)\dot\theta_{3z}\vec y$

Q3 – On écrit la composition des vitesses au point B *(qui n'est pas la même que celle qu'on a écrite en* **Q2** *– b.)* :

$\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \overrightarrow{V_{B,1/0}}$

avec $\overrightarrow{V_{B,2/1}} = \vec 0$ car B est le centre de la rotule 2/1

D'où $-L\dot\alpha\vec x = \dot x\vec x - x(t)\dot\theta_{3y}\vec z + x(t)\dot\theta_{3z}\vec y$ que l'on peut projeter pout écrire : $\begin{array}{l} /\vec x \\ /\vec y \\ /\vec z \end{array}\begin{cases} L\dot\alpha = \dot x\\ x(t)\dot\theta_{3y} = 0\\ x(t)\dot\theta_{3z} = 0\end{cases}$

$\boxed{\text{On a donc } L\dot\alpha = \dot x \text{ et, puisque } x(t)\neq 0 \text{ (dans le cas général), } \dot\theta_{3y} = 0 \text{ et } \dot\theta_{3z} = 0.}$