Cycle 4: Analyser, modéliser et étudier le comportement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Chapitre 2 – Modélisation des systèmes asservis – Transformée de Laplace

Asservissement du freinage d'un A 318

Asservissement en vitesse et position d'un centre d'usinage

Asservissement de la position du rotor d'une pompe turbo moléculaire

On veut prévoir le comportement de systèmes intégrant des technologies différentes. Par exemple, en mode automatique, le freinage d'un avion dépend de son accélération (technologie mécanique). L'envoi de l'ordre de freinage est piloté par une servo-valve électro-hydraulique (technologies électriques et hydrauliques).

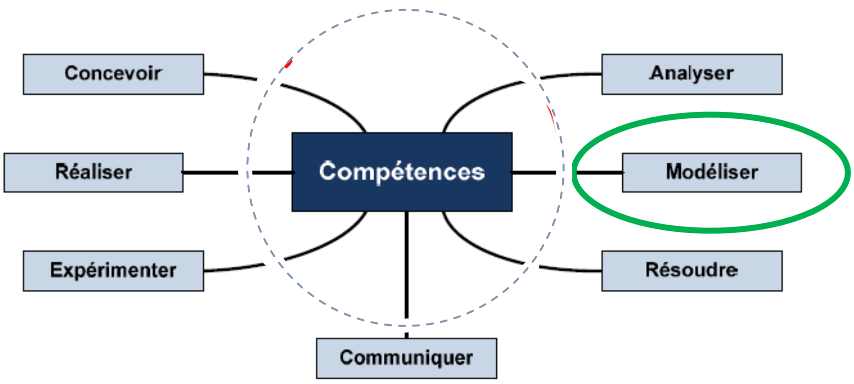
Il va donc falloir d'une part définir des outils mathématiques indépendant des différentes technologies pour décrire le fonctionnement des systèmes. D'autre part, ces modèles devront permettre de connaître les réponses du système en fonction de sollicitations diverses (échelons, rampes, sinusoïdes ...).

Classiquement, ces systèmes sont modélisables par des équations différentielles. Or, déterminer une solution analytique pour une équation différentielle n'est pas toujours aisé.

PROBLÉMATIQUES :
- Comment modéliser un système dont le fonctionnement fait appel à plusieurs champs de la physiques ?
- Comment déterminer le comportement d'un système lorsque celui-ci est régit par une équation différentielle complexe ?

Remarque

SAVOIRS :
- Mod-C2.1 Modélisation par équations différentielles.
- Mod-C2.2 Représentation par fonction de transfert (formalisme de Laplace).



Sommaire

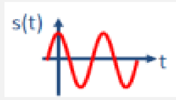
Pour que le schéma-bloc fonctionnel puisse être utilisé en simulation sous cette forme, il faut pouvoir **caractériser le comportement de chaque composant** indépendamment des autres. Ceci est réalisé, sous certaines hypothèses, par les **fonctions de transfert.**

1. Modèle utilisé : Systèmes Linéaires Continus et Invariants (SLCI)

La modélisation du comportement d'un composant consiste à **chercher la relation entre une ou plusieurs grandeurs d'entrée et une grandeur de sortie, appelée aussi réponse.** Le modèle utilisé pour caractériser le comportement des composants vérifie les hypothèses des Systèmes Linéaires Continus Invariants (SLCI).

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

- les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière **continue** avec le temps,
- le système est **invariant**, c'est-à-dire qu'il reste identique et valable à chaque instant durant la période d'étude (1),
- le système est **linéaire** (2), c'est-à-dire que la sortie est une combinaison linéaire des réponses aux signaux d'entrée.



(1) L'usure de certaines pièces, par exemple, peut se traduire par des évolutions des lois de comportement au cours du temps, qui ne sont pas prises en compte.

(2) La limite de vitesse d'un moteur est une non-linéarité, par exemple.

Dans ces cas, il faut restreindre le domaine d'étude et/ou faire une linéarisation autour d'un point de fonctionnement

Les **SLCI** sont caractérisés par un **système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n\frac{d^ns}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}+\dots+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s(t)=b_m\frac{d^me}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}+\dots+b_1\frac{de}{dt}+b_0e(t)$$

$e(t)$: entrée et $s(t)$: sortie

n est **l'ordre** du système.

Pour des raisons liées à la causalité (le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur), les systèmes réels étudiés imposent $m \leq n$. Cette propriété permet de définir, à priori, les entrées et la sortie.

Le modèle peut être obtenu par application des lois de la physique ou expérimentalement.

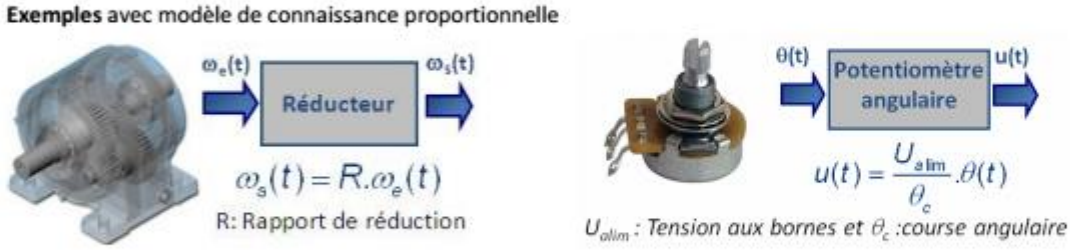
Un **modèle de connaissance** est un modèle mathématique déterminé par application de lois et principes de la **physique**.

Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de réponses **expérimentales** à des signaux tests.

1.1. Modèle de comportement des systèmes les plus simples

De nombreux systèmes, tels les réducteurs de vitesse, potentiomètre, capteurs, résistance électrique..., sont modélisés par une **simple relation de proportionnalité entre l'entrée et la sortie**, appelé **GAIN** du constituant.

Exemples avec modèle de connaissance proportionnelle



1.2. Modèle de comportement des systèmes du 1er ordre

Un modèle plus élaboré, couramment rencontré, est le modèle dit du premier ordre. La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

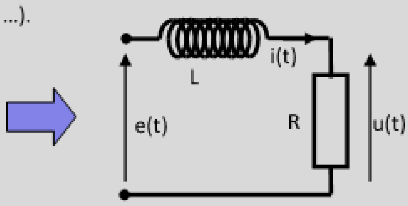
$$\boxed{\tau.\frac{d\,s(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)}$$

où : K est le gain statique du système.

τ est la constante de temps.

Exemple : Moteur pas à pas se comportant comme un circuit RL
On s'intéresse à un circuit RL (résistance + bobine) couramment rencontré dans les circuits électriques (filtres, moteur pas à pas, …).

Réel



Modèle

Les équations électriques du circuit sont les suivantes : $e(t)=L.\frac{d\,i(t)}{dt}+u(t)$ *(1)*

$u(t)=R.i(t)$ *(2)*

Soit $e(t)=\frac{L}{R}.\frac{d\,u(t)}{dt}+u(t)$ *→ On obtient bien une équation différentielle d'ordre 1.*

La constante de temps vaut $\tau=\frac{L}{R}$ *(en secondes) et le gain statique vaut 1.*

1.3. Modèle de comportement des systèmes du 2ème ordre

Un autre modèle très couramment rencontré est le modèle dit du second ordre. La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du second ordre est :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0{}^2}.\frac{d^2\,s(t)}{dt^2}+2\frac{z}{\omega_0}.\frac{d\,s(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)}$$ où :

K est le gain statique du système.

z est le coefficient d'amortissement [5].

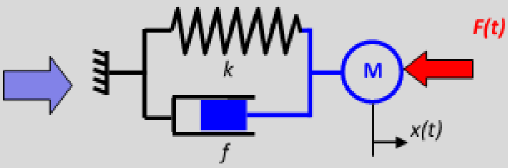
ω_0 est la pulsation propre non amortie du système [6].

[5] le coefficient d'amortissement z est toujours > 0

[6] la pulsation propre non amortie du système ω_0 est toujours > 0

Exemple : Système masse-ressort-amortisseur
On s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un système amortisseur ressort. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle.

Réel : Système d'amortissement d'un quad



Modèle : Schéma de modélisation du système masse-ressort-amortisseur

On note F(t) la force exercée sur la masse M et x(t) la position de cette masse par rapport à l'équilibre. La masse M est soumise :

- *à l'action F(t)*
- *à l'action du ressort : -k.x(t)*
- *à l'action de l'amortisseur :* $-f.\frac{dx(t)}{dt}$

L'écriture du principe fondamental de la dynamique sur la masse M permet d'écrire :

$M.\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-f.\frac{dx(t)}{dt}-k.x(t)+F(t)$ *Soit :* $M.\frac{d^2x(t)}{dt^2}+f.\frac{dx(t)}{dt}+k.x(t)=F(t)$

→ L'équation obtenue est bien une équation différentielle d'ordre 2.

La pulsation propre non amortie vaut $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}$ *(radians/secondes), le coefficient d'amortissement vaut* $z=\frac{f}{2.\sqrt{k.M}}$ *(sans unité) et le gain statique vaut* $K=\frac{1}{k}$ *(m.N*$^{-1}$*).*

2. <u>Modèle de comportement général des SLCI et démarche de résolution de l'équation différentielle</u>

Un SLCI est modélisé par un **modèle de comportement** représenté par une équation différentielle d'ordre n reliant la sortie **s(t)** à l'entrée **e(t)**. Elle est obtenue par la combinaison des différentes équations différentielles issues des modèles de comportement des sous-systèmes élémentaires constituant le schéma-bloc fonctionnel du système global. Elle s'écrit sous la forme générale :

$$a_n.\frac{d^n s(t)}{dt^n}+...+a_0.s(t)=b_m.\frac{d^m e(t)}{dt^m}+...+b_0.\ e(t)$$

Modèle de comportement sous forme d'équation différentielle

Les systèmes étudiés impliquent que $n \geq m$ afin de respecter la condition de causalité du système (n est appelé l'ordre du système). Une fois cette équation obtenue, deux questions peuvent alors se poser :

- *Comment prendre en compte la modification de modélisation d'un composant (moteur par exemple) de manière aisée ?*
- *Comment obtenir la réponse du système pour une entrée quelconque afin d'analyser les performances globales du système* ?

On constate dans ces deux situations que l'écriture sous forme différentielle du SLCI n'est pas adaptée pour une résolution à la main car la recherche de la solution de l'équation différentielle reste difficile et trop complexe pour des équations d'ordre élevé ou lorsque la consigne e(t) est de forme compliquée.

L'outil privilégié pour traiter un SLCI de manière efficace, tant pour analyser le comportement, que pour résoudre une équation d'ordre quelconque, est la **transformation de Laplace** qui permet d'obtenir une relation algébrique entre la sortie et l'entrée. **L'intérêt principal de cette méthode est de manipuler algébriquement des polynômes plutôt qu'une équation différentielle**.

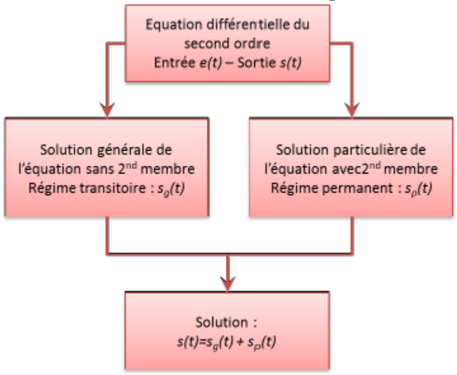
Pour cela il faut :

- *utiliser la transformée de Laplace pour passer du domaine temporel vers le domaine de Laplace*
- *manipuler proprement des polynômes pour mettre en forme la solution S(p)*
- *utiliser la transformée inverse de Laplace une fois la solution S(p) mise en forme, pour rebasculer vers le domaine temporel.*

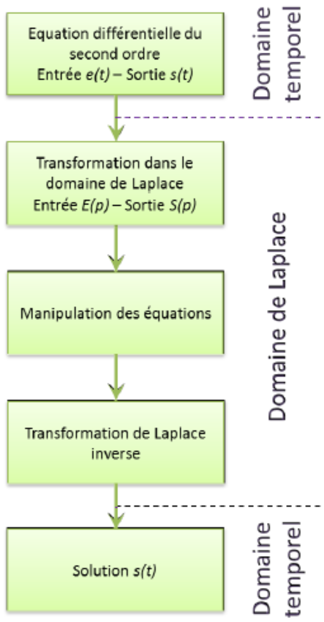
Modélisation des systèmes asservis – Transformée de Laplace

Dans le domaine temporel, la variable est le temps, noté t . Dans le domaine de Laplace, la variable est notée $\boldsymbol{p}$ (ou s dans les pays anglo-saxons). *On peut aussi noter :* $p=\sigma+j\omega$ *(variable complexe).*

Méthode de résolution d'une équation du second ordre dans le domaine temporel



Méthode de résolution d'une équation dans le domaine de Laplace



2.1. Définition de la transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle telle que $f(t)=0$ pour $t<0$ [1]. On définit sa transformée de Laplace $L[f(t)]$ comme l'unique **fonction** $F(p)$ **de la variable complexe** p **telle que :**

$$f(t)\xrightarrow{L[f(t)]}F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

(1) L'ingénieur a pour pratique d'étudier l'effet d'une cause qu'il situe à la date t=0. La cause précédant toujours l'effet, la transformée de Laplace n'est défie que pour des fonctions dites « causales ».

La transformation de Laplace permet de transformer les équations différentielles en polynômes, de définir les fonctions de transfert, de représenter par schéma-bloc un système et de calculer simplement la valeur finale !

2.2. Propriétés de la transformée de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement les transformées de Laplace des équations du modèle de connaissance.

Propriété

Linéarité

Soit $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$ et $\mathscr{L}[g(t)]=G(p)$.

On démontre que :

$$\mathscr{L}[f(t)+g(t)]=\mathscr{L}[f(t)]+\mathscr{L}[g(t)]=F(p)+G(p)$$

et que :

$$\mathscr{L}[K\cdot f(t)]=K\cdot\mathscr{L}[f(t)]=K\cdot F(p)$$

Propriété

Conditions de Heaviside

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différention sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2 f(0^+)}{dt^2} = 0 \ldots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Propriété

Intégration dans les conditions de Heaviside :

$$\mathscr{L}\left[\int_{0^+}^{t} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

Propriété

Transformée de Laplace de la dérivation

La transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par :

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

La transformée de Laplace d'une dérivée seconde est donnée par :

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - pf(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt}$$

Dans les conditions de Heaviside,

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$$

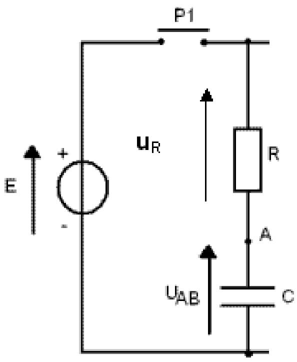
Application : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation différentielle suivante dans les conditions de Heaviside : $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3.\frac{dy(t)}{dt}=1$

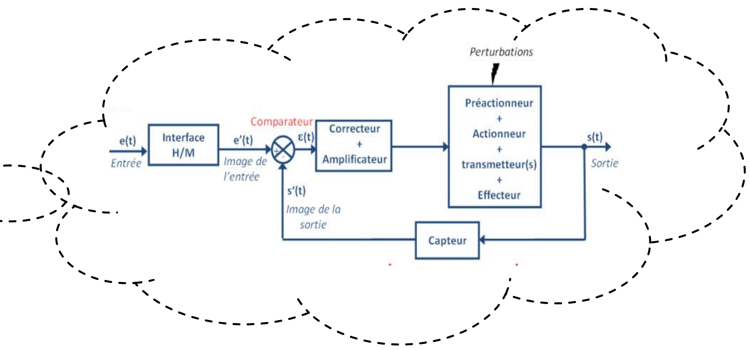
$$p^2.Y(p)+3.p.Y(p)=\frac{1}{p} \quad \text{car } \dot{y}(0)=y(0)=0 \rightarrow Y(p)=\frac{1}{p^2.(p+3)}$$

<u>Que se cache sous l'expression de l'équation différentielle et de Laplace ?</u>

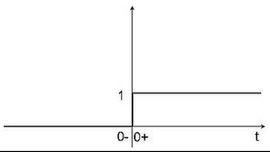
L'équation différentielle se sépare en 2.

* La *partie gauche* représente **la loi de comportement du système** étudié.
Voilà le système que vous étudiez en réalité: **charge d'un condensateur**





* La *partie droite* correspond à la **sollicitation.**



On applique un **échelon de tension unitaire** (signal électrique) tel que à t<0, U=0V et à t=0, U=1V.

On appui sur le bouton poussoir P1 et on obtient la réponse du système en sortie $U_{AB}(t)$

Application : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation différentielle suivante

$$3.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+6.\frac{d\theta(t)}{dt}+3.\theta(t)=e(t)$$

avec $\theta(0)=1$ et $\dot{\theta}(+0)=2$

$$\begin{cases} 3.[p^2.\Theta(p)-p.\ \theta(0+)-\dot{\theta}(0+)]+6.[p.\Theta(p)-\theta(0+)]+3.\Theta(p)=E(p) \\ 3..[p^2.\Theta(p)-p.1-2]+6.[p.\Theta(p)-1]+3\ \Theta(p)=E(p) \\ 3.p^2.\Theta(p)+6.p.\Theta(p)+3.\Theta(p)-3.p-12=E(p) \end{cases}$$

2.3. Théorèmes usuels

Ils nous permettent de **caractériser le système** par ses conditions initiales (d'où par le mouvement par ex) et surtout les performances à l'arrivée après sollicitation (valeur finale atteinte, erreur statique....).

Théorème

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

Théorème

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

Théorème

Théorème du retard

$$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right] = e^{-t_0 p}F(p)$$

Tout retard temporel t0 sur une fonction se traduit par un facteur multiplicatif e ^{t0p} sur sa transformée de Laplace.

2.4. Transformées usuelles de fonctions causales

Nous ne chercherons pas à déterminer F(p) par la définition (car résoudre l'intégrale est aussi difficile que de résoudre l'équation différentielle du départ). Nous nous servirons de tableaux qu'il faudra connaître :

f(t)	Impulsion de Dirac δ(t)	1.u(t)	t	e^{-at}	$t.e^{-at}$	cos(ωt)	sin(ωt)	$e^{-at}.\cos(\omega t)$	$e^{-at}.\sin(\omega t)$
F(p)	1	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p^2}$	$\dfrac{1}{p+a}$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

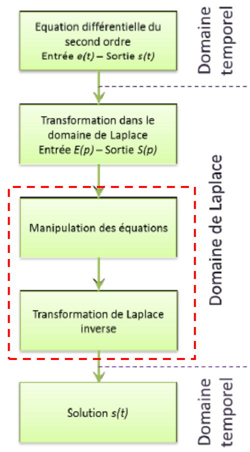
Démonstration

Calcul de $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ avec $f(t) = e^{-at} \quad \forall t > 0$.

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \mathscr{L}\left[e^{-at}\right] = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\,dt = \left[-\frac{1}{p+a}e^{-(p+a)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

3. La transformée inverse de Laplace

Méthode de résolution d'une équation dans le domaine de Laplace



Après avoir trouvé la transformée dans le domaine de Laplace de l'équation différentielle du système soumis à une entrée, on se retrouve avec une **fonction polynomiale**. Pour connaître la **réponse du système dans le domaine temporel**, on doit effectuer la **transformée inverse de Laplace** de ce polynôme.

La transformation inverse consiste à **décomposer la fraction rationnelle** (en *p*) **en éléments simples** (somme de plusieurs fractions simples en *p*) et à identifier chaque élément simple à une fonction élémentaire en *t* .

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de $S(p)$, donc s(t) $=L^{-1}$ [$S(p)$], il faut :

3.1. Mettre l'ordre du polynôme du numérateur inférieur à celui du dénominateur

$$\frac{Polynome\ A\ d'ordre\ n}{Polynome\ B\ d'ordre\ n} = 1 + \frac{Polynome\ C\ d'ordre\ m}{Polynome\ B\ d'ordre\ n}$$

Exemple : $$\frac{p^2+1}{p^2+3.p+2} = \frac{p^2+3.p+2-3.p-1}{p^2+3.p+2} = 1 + \frac{-3.p-1}{p^2+3.p+1}$$

3.2. Rechercher les racines du dénominateur

Soit S(p) = $$\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_0+\gamma_1.p+\gamma_2.p^2+\gamma_3.p^3+\gamma_4.p^4+\gamma_5.p^5}$$

Supposons que le dénominateur ait :
- 1 racine réelle simple p = a
- 1 racine réelle double p = b
- 2 racines complexes conjuguées : p = c ± j.d

3.3. Factoriser le dénominateur

Donc S(p) = $$\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_5.(p-a).(p-b)^2.[(p-c)^2+d^2]}$$

3.4. Décomposer en éléments simples

La règle pour définir le nombre d'éléments simples est la suivante :
Supposons que le dénominateur ait :

- **1 racine réelle simple p = a** → 1 élément simple de la forme $\frac{A}{p-a}$ *(avec A constante réelle)*

- **1 racine réelle double p = b** → 2 éléments simples de la forme $\frac{A}{p-b}$ *et* $\frac{B}{(p-b)^2}$
(avec A et B constantes réelles)

- **2 racines complexes conjuguées : p = c ± j.d** → 1 élément simple de la forme $\frac{A.p+B}{[(p-c)^2+d^2]}$
(avec A et B constantes réelles)

donc S(p) = $$\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_5.(p-a).(p-b)^2.[(p-c)^2+d^2]} = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{(p-b)^2} + \frac{D.p+E}{[(p-c)^2+d^2]}$$

3.5. Déterminer les constantes

- A : multiplier S(p) par (p-a) et faire tendre p vers a

$$\lim_{p\to a}(p-a).S(p)=\lim_{p\to a}\left[(p-a).\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_5.(p-a).(p-b)^2.[(p-c)^2+d^2]}\right]=\frac{\alpha_0+\alpha_1.a+\beta_2.a^2+\alpha_3.a^3+\alpha_4.a^4}{\gamma_5.(a-b)^2.[(a-c)^2+d^2]}$$

$$=\lim_{p\to a}\left[\frac{A.(p-a)}{p-a}+\frac{B.(p-a)}{p-b}+\frac{C.(p-a)}{(p-b)^2}+\frac{(D.p+E).(p-a)}{[(p-c)^2+d^2]}\right]=\text{A}$$

donc A = $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1.a+\beta_2.a^2+\alpha_3.a^3+\alpha_4.a^4}{\gamma_5.(a-b)^2.[(a-c)^2+d^2]}$

- C : multiplier S(p) par $(p-b)^2$ et faire tendre p vers b

$$\lim_{p\to b}(p-b)^2.S(p)=\lim_{p\to b}\left[(p-b)^2.\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_5.(p-a).(p-b)^2.[(p-c)^2+d^2]}\right]=\frac{\alpha_0+\alpha_1.b+\beta_2.b^2+\alpha_3.b^3+\alpha_4.b^4}{\gamma_5.(b-a).[(b-c)^2+d^2]}$$

$$=\lim_{p\to b}\left[\frac{A.(p-b)^2}{p-a}+\frac{B.(p-b)^2}{p-b}+\frac{C.(p-b)^2}{(p-b)^2}+\frac{(D.p+E).(p-b)^2}{[(p-c)^2+d^2]}\right]=\text{C}$$

donc C = $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1.b+\beta_2.b^2+\alpha_3.b^3+\alpha_4.b^4}{\gamma_5.(b-a).[(b-c)^2+d^2]}$

- B : multiplier S(p) par (p-b) et faire tendre p vers +∞

$$\lim_{p\to+\infty}(p-b).S(p)=\lim_{p\to+\infty}\left[(p-b).\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_5.(p-a).(p-b)^2.[(p-c)^2+d^2]}\right]=\frac{\alpha_4}{\gamma_5}$$

$$=\lim_{p\to+\infty}\left[\frac{A.(p-b)}{p-a}+\frac{B.(p-b)}{p-b}+\frac{C.(p-b)}{(p-b)^2}+\frac{(D.p+E).(p-b)}{[(p-c)^2+d^2]}\right]=\text{A + B + 0+ D + 0}$$

donc A + B + 0+ D + 0 = $\dfrac{\alpha_4}{\gamma_5}$

- D et E : multiplier par $(p-c)^2+d^2$ et faire tendre p vers c+j.d, puis identifier partie réelle et imaginaire

$$\lim_{p\to c+j.d}\left[(p-c)^2+d^2\right]S(p)=\lim_{p\to c+j.d}\left[\left[(p-c)^2+d^2\right]\frac{\alpha_0+\alpha_1.p+\beta_2.p^2+\alpha_3.p^3+\alpha_4.p^4}{\gamma_5.(p-a).(p-b)^2.[(p-c)^2+d^2]}\right]=\left[\frac{\alpha_0+\alpha_1.(c+j.d)+\beta_2.(c+j.d)^2+\alpha_3.(c+j.d)^3+\alpha_4.(c+j.d)^4}{\gamma_5.((c+j.d)-a).((c+j.d)-b)^2}\right]$$

$$=\lim_{p\to c+j.d}\left[\frac{A.[(p-c)^2+d^2]}{p-a}+\frac{B.[(p-c)^2+d^2]}{p-b}+\frac{C.[(p-c)^2+d^2]}{(p-b)^2}+\frac{(D.p+E).[(p-c)^2+d^2]}{[(p-c)^2+d^2]}\right]=\text{D.p + E}$$

3.6. Identifier les transformées usuelles inverses

$\frac{A}{p-a}$, $\frac{B}{p-b}$ *et* $\frac{C}{(p-b)^2}$ sont identifiables immédiatement mais $\frac{D.p+E}{[(p-c)^2+d^2]}$ doit être mis sous la forme de :

$$\frac{D.p+E}{[(p-c)^2+d^2]}=\frac{D.(p-c)}{[(p-c)^2+d^2]}+\frac{D.c+E}{[(p-c)^2+d^2]}=D.\frac{(p-c)}{[(p-c)^2+d^2]}+\frac{D.c+E}{d}.\frac{d}{[(p-c)^2+d^2]}$$

On trouve en identifiant avec les transformées usuelles, la transformée inverse :

$$\boxed{s(t) = [A.e^{a.t} + B.e^{b.t} + C.t.e^{b.t} + D.e^{c.t}.\cos(d.t) + \frac{D.c+E}{d}.e^{c.t}.\sin(d.t)].u(t)}$$

On notera que quand $t \to +\infty$, cette fonction converge si et seulement si a, b et c sont négatifs.

s(t) est donc stable si et seulement si les parties réelles des racines du dénominateur sont négatives.

Application : A partir de l'expression de la transformée de Laplace trouvée en p6, déterminer l'expression de la **sortie y(t).**

$$p^2.Y(p) + 3.p.Y(p) = \frac{1}{p} \quad \text{car } \dot{y}(0) = y(0) = 0 \rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2.(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3}$$

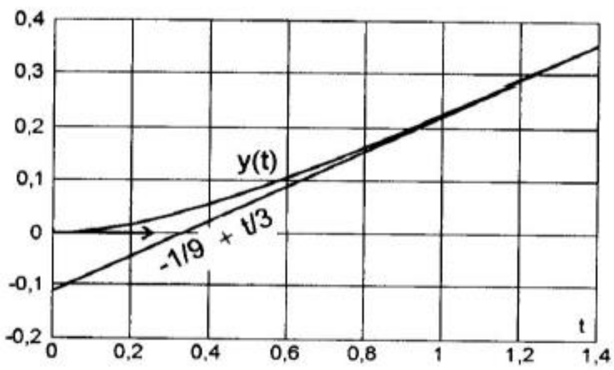
Pour trouver les coefficients $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{1}{9}$, il faut :

- multiplier par p + 3 et faire tendre p vers –3 ⟶ C
- multiplier par p^2 et faire tendre p vers 0 ⟶ B
- multiplier par p et faire tendre p vers ∞ ⟶ A

Et on trouve bien :

$$y(t) = -\frac{1}{9} + \frac{t}{3} + \frac{1}{9}.e^{-3.t}$$

qui a pour asymptote en $+\infty$, la droite $y(t) = -\frac{1}{9} + \frac{t}{3}$



<u>Un petit pas vers la **fonction de transfert et l'analyse temporelle....**</u>

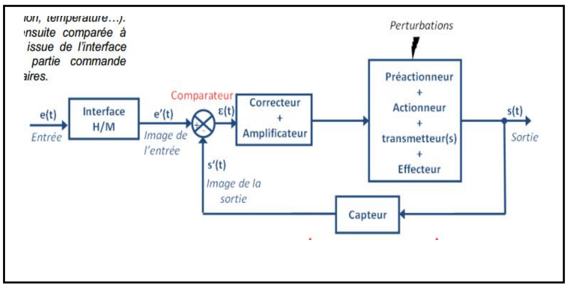
Si on reprend l'expression de $Y(p) = 1/p^2*(p+3)$. Ceci est l'expression de la sortie dans le domaine de Laplace conséquence d'une entrée en échelon unitaire dans Laplace = 1/p.

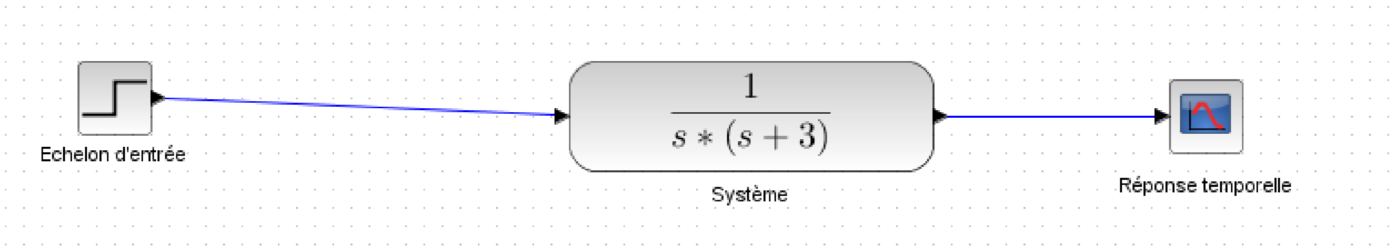
On peut donc écrire: $Y(p) = 1/p(p+3) * (1/p)$ soit $\boxed{\mathbf{Y(p) = 1/p(p+3) * E(p)}}$

On peut donc exprimer facilement la sortie en fonction de l'entrée dans laplace et donc ce que l'on appelle la **fonction de transfert:**

H(p) = Y(p) / E(p) soit $\boxed{\mathbf{H(p) = 1/p(p+3)}}$

On peut donc maintenant mettre en entrée tout ce que l'on veut, la sortie sera toujours: $Y(p) = H(p) * E(p)$
Voici une autre forme d'écriture à l'aide d'un **schéma bloc simplifié:**





Voici **l'expression de la sortie U_{AB}(t)** à un échelon unitaire....on retrouve la courbe trouvée analytiquement.